DIFERENCIJALNI RAČUN

IZVOD FUNKCIJE

Definicija 1. Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana na intervalu (a,b) i neka $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$, $\Delta x \neq 0$.

- **Prvi izvod funkcije** f u tački x_0, u oznaci $f'(x_0)$, je granična vrijednost $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.
- Ako je $f'(x_0)$ konačan broj, tada kažemo da je funkcija f **diferencijabilna u tački** x_0. Koristimo oznaku: $f \in D(x_0)$.
- Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački iz intervala (a,b), tada kažemo da je funkcija f **diferencijabilna na** (a,b)**.** Koristimo oznaku: $f \in D(a,b)$

Geometrijska interpretacija izvoda: Neka je (k) grafik neprekidne funkcije f na intervalu (a,b), koja u tački $x_0 \in (a,b)$ ima konačan izvod $f'(x_0)$. Označimo sa α ugao koji tangenta krive (k) u tački $M(x_0, f(x_0))$ zaklapa sa pozitivnim dijelom $x-$ose. Koeficijent pravca te tangente jednak je prvom izvodu funkcije f u tački x_0, tj. $tg\alpha = f'(x_0)$.

Jednačina tangente u tački $M(x_0, f(x_0))$, $y_0 = f(x_0)$ funkcije $y = f(x)$ je:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Jednačina normale u tački $M(x_0, f(x_0))$, $y_0 = f(x_0)$ funkcije $y = f(x)$ je:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Primjer 1. Po definiciji odrediti izvode sljedećih funkcija u proizvoljnoj tački x.

a) $f(x) = c, c = \boldsymbol{const.}$ ***b)*** $f(x) = x$, ***c***) $f(x) = x^2$, ***d***) $f(x) = x^n$,
e) $f(x) = a^x$, ***f***) $f(x) = e^x$.

a) $f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0 \quad\Rightarrow\quad (c)'=0,$$

b) $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=1 \quad\Rightarrow\quad (x)'=1,$$

c) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x \quad\Rightarrow (x^2)'=2x,$$

d) $f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{nx^{n-1}\Delta x+\binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n}{\Delta x}=nx^{n-1} \quad\Rightarrow\quad (x^n)'=nx^{n-1},$$

e) $f(x)=a^x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=a^x\cdot\ln a \quad\Rightarrow\quad (a^x)'=a^x\ln a,$$

f) $f(x)=e^x$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=e^x\cdot 1=e^x \quad\Rightarrow\quad (e^x)'=e^x.$$

Kao u prethodnom primjeru nalazimo izvode svih elementarnih funkcija i dobijamo **tablicu izvoda elementarnih funkcija**:

1. $(c)' = 0,\ c = \boldsymbol{const.},$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in N,$
3. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \alpha \in R,$
4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0,$
5. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0,$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, a > 0, a \neq 1, x \in R,$
7. $(e^x)' = e^x,$
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1, x > 0,$
9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, x > 0,$
10. $(\sin x)' = \cos x, x \in R,$
11. $(\cos x)' = -\sin x, x \in R,$
12. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z,$
13. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in Z,$
14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1,$
15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1,$
16. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, x \in R,$
17. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, x \in R.$

Definicija 2. Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana na intervalu (a,b) i neka $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b), \quad \Delta x \neq 0$.

- **Lijevi izvod funkcije** f u tački x_0 je $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)$.
- **Desni izvod funkcije** f u tački x_0 je $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$.

Teorema 1. Funkcija f je diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako postoje lijevi i desni izvod funkcije f u tački x_0 i ako je $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Teorema 2. Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 tada je funkcija f neprekidna u tački x_0.

Primjer 2. Dokazati da je funkcija $f(x) = |x|$ neprekidna u tački $x = 0$ a nije diferencijabilna u tački $x = 0$.

Dokažimo da je funkcija $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ neprekidna u tački $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f \in C(0).$$

Dokažimo da funkcija $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$ nije diferencijabilna u tački $x=0$.

$$\left.\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1 \\ f'_+(0) &= \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad f'_-(0)\neq f'_+(0)\quad\Rightarrow\quad f\notin D(0)$$

Računanje izvoda po definiciji nije jednostavno, da bi se to računanje pojednostavilo izvode se sljedeća pravila.

Teorema 3. Osnovna pravila diferenciranja su:

- $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),$
- $\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x),$
- $\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),$
- $\left(c\cdot f(x)\right)' = c\cdot f'(x),\ c\in R,$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)},$
- Neka je funkcija g diferencijabilna u tački x i funkcija f diferencijabilna u tački $y=g(x)$. Tada je funkcija $f\circ g$ diferencijabilna u tački x i važi $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.
- Neka je funkcija f diferencijabilna u tački x i neka funkcija f ima inverznu funkciju $g=f^{-1}$ koja je neprekidna u nekoj okolini tačke $f(x)$. Ako je $f'(x)\neq 0$ tada postoji $g'(f(x))$ i važi $g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$.
- Izvod funkcije $y=y(x)$ koja je zadata implicitno jednačinom $F(x,y)=0$ dobija se diferenciranjem jednačine $F(x,y)=0$, smatrajući da je y funkcija od x, a zatim se riješi dobijena jednačina po y'.
- Neka su funkcije $x(t)$ i $y(t)$ definisane na istom intervalu i neka u tački t tog intervala imaju izvode $x'(t)$ i $y'(t)$, pri čemu je $x'(t)\neq 0$. Tada funkcija $y=y(x)$ koja je zadata parametarskim jednačinama $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ ima izvod $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Primjer 3. Koristeći prethodnu teoremu izračunati izvode sljedećih funkcija:

a) $y=x^2+\sin x$, ***b***) $y=x^5\cdot\sin x$, ***c***) $y=5\cdot\log_3 x$, ***d***) $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$,

e) $y=\sin(\ln x)$, ***f***) $y=\ln(\sin x)$, ***g***) $9x^2+4y^2=36$, ***h***) $\begin{cases} x=5\sin t \\ y=5\cos t \end{cases}$.

a) $y=x^2+\sin x \quad\Rightarrow\quad y'=\left(x^2\right)'+\left(\sin x\right)' = 2x+\cos x,$

b) $y=x^5\cdot\sin x\Rightarrow y'=\left(x^5\right)'\cdot\sin x+x^5\cdot\left(\sin x\right)'=5x^4\cdot\sin x+x^5\cdot\cos x,$

c) $y = 5 \cdot \log_3 x \quad \Rightarrow \quad y' = 5 \cdot (\log_3 x)' = 5 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} = \frac{5}{x \ln 3}$,

d) $y = \frac{x^2}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{(x^2)' \cdot \sin x - x^2 \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}$,

e) $y = \sin(\ln x) \quad \Rightarrow \quad y' = \cos(\ln x) \cdot (\ln x)' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}$,

f) $y = \ln(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctgx$,

g) $9x^2 + 4y^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot (x^2)' + 4 \cdot (y^2)' = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = -\frac{9x}{4y}$,

h) $\begin{cases} x = 5 \sin t \\ y = 5 \cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(5 \cos t)'}{(5 \sin t)'} = \frac{-5 \sin t}{5 \cos t} = -tgt$.

Primjer 4. Napisati jednačinu tangente i normale na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ u tački $M(3,4)$.

$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$, pa je u tački $M(3,4)$ $y'_0 = -\frac{3}{4}$.

Jednačina tangente je: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, tj. $y - 4 = -\frac{3}{4} \cdot (x - 3)$, tj. $3x + 4y - 25 = 0$.

Jednačina normale je: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$, tj. $y - 4 = \frac{4}{3} \cdot (x - 3)$, tj. $4x - 3y = 0$.

Definicija 3. Prvi diferencijal funkcije f u tački x jednak je proizvodu izvoda funkcije f u tački x i diferencijala nezavisne promjenljive x, tj. $dy = f'(x) \cdot dx$.

Osobine diferencijala:

- $d(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot df, \quad \alpha \in R$,
- $d(f + g) = df + dg$,
- $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$,
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}, \quad g \neq 0$,
- $d(f(g(x))) = f'_g \cdot dg$.

Definicija 4. Drugi izvod $f''(x)$ funkcije f u tački x je prvi izvod izvoda $f'(x)$ funkcije f u tački x, tj. $f''(x) = (f'(x))'$. Uopšte, ***n*−ti izvod** $f^{(n)}(x)$ funkcije f u tački x je prvi izvod $(n-1)-$og izvoda funkcije f u tački x, tj. $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Ako funkcija f ima ***n*−**ti izvod u svakoj tački nekog intervala, tada se kaže da je funkcija f ***n* puta diferencijabilna** na tom intervalu.

Definicija 5. Drugi diferencijal $\boldsymbol{d^2 f(x)}$ funkcije f u tački x je prvi diferencijal diferencijala $df(x)$ funkcije f u tački x, tj. $d^2 f(x) = d(df(x))$. Uopšte ***n*−ti diferencijal** $d^n f(x)$ funkcije

f u tački x je prvi diferencijal $(n-1)-$og diferencijala $d^{n-1}f(x)$ funkcije f u tački x, tj. $d^n f(x) = d\left(d^{n-1}f(x)\right)$.

Teorema 4. (Lajbnicova formula) Ako su funkcije f i g n puta diferencijabilne tj. imaju sve izvode do *n*-tog reda zaključno, tada za izračunavanje *n*-tog izvoda (diferencijala) proizvoda $f \cdot g$ važi Lajbnicova formula:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}, \qquad d^n(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^{n-k} f \cdot d^k g.$$

Primjer 5. Naći diferencijal funkcija:

a) $y = \left(3x^2 - x\right)^{\frac{3}{2}}$, b) $y = (3-x)^7$, c) $y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, d) $y = \arcsin 2x$,
e) $y = 2^x - 3^{-x} + \sqrt{x}$.

a)
$$y = \left(3x^2 - x\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}\left(3x^2 - x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = y'dx = \frac{3}{2}\left(3x^2 - x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x-1)\,dx$$

b)
$$y = (3-x)^7 \Rightarrow y' = 7 \cdot (3-x)^6 \cdot (-1) = -7 \cdot (3-x)^6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = y'dx = -7 \cdot (3-x)^6\,dx$$

c)
$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y' = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2x\right) = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = y'dx = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

d)
$$y = \arcsin 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow dy = y'dx = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$$

e) $y = 2^x - 3^{-x} + \sqrt{x} \Rightarrow y' = 2^x \cdot \ln 2 - 3^{-x}(-1)\ln 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$
$= 2^x \ln 2 + 3^{-x}\ln 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dy = y'dx = (2^x \ln 2 + 3^{-x}\ln 3 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}})dx.$

Primjer 6. Naći drugi izvod i drugi diferencijal funkcija:

a) $y = x\sqrt{1+x^2}$, b) $y = x^2 \ln x$, c) $y = e^{x^2}$, d) $y = \left(1+x^2\right) \cdot arctgx$, e) $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

a) $y = x\sqrt{1+x^2} \quad \Rightarrow$

$$y' = 1\cdot\sqrt{1+x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2+x^2}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow y'' = (y')' = \left(\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{4x\cdot\sqrt{1+x^2} - \left(1+2x^2\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x\cdot\left(3+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} \quad \Rightarrow d^2y = d\left(dy\right) = d\left(y'dx\right) = y''dx^2 = \frac{x\cdot\left(3+2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx^2,$$

b) $y = x^2 \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\ln x + x \quad \Rightarrow$

$$y'' = (y')' = (2x\ln x + x)' = 2\ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3 \quad \Rightarrow$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx = (2\ln x + 3)dx^2,$$

c) $y = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{x^2}\cdot 2x \quad \Rightarrow$

$$y'' = (y')' = \left(e^{x^2}2x\right)' = e^{x^2}2x\cdot 2x + e^{x^2}\cdot 2 = e^{x^2}\left(4x^2+2\right) \quad \Rightarrow$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2 = e^{x^2}\left(4x^2+2\right)dx^2,$$

d) $y = \left(1+x^2\right)\cdot arctgx \quad \Rightarrow$

$$y' = 2x\cdot arctgx + \left(1+x^2\right)\cdot\frac{1}{1+x^2} = 2x\cdot arctgx + 1 \quad \Rightarrow$$

$$y'' = (y')' = (2x\cdot arctgx + 1)' = 2arctgx + 2x\cdot\frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2 = \left(2arctgx + 2x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)dx^2,$$

e) $y = \frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \Rightarrow$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2 = \left(\frac{-3+2\ln x}{x^3}\right)dx^2.$$

Primjer 7. Korišćenjem Lajbnicove formule izračunati $y^{(200)}$ ako je $y = x^2e^x$.

Iz Lajbnicove formule $(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$ slijedi da je:

$$y^{(200)} = \left(e^x \cdot x^2\right)^{(200)} = \sum_{k=0}^{200} \binom{200}{k} \cdot \left(e^x\right)^{(200-k)} \cdot \left(x^2\right)^{(k)} = \binom{200}{0} \cdot \left(e^x\right)^{(200)} \cdot \left(x^2\right)^{(0)} +$$

$$+\binom{200}{1} \cdot \left(e^x\right)^{(199)} \cdot \left(x^2\right)' + \binom{200}{2} \cdot \left(e^x\right)^{(198)} \cdot \left(x^2\right)'' + 0 =$$

$$= e^x \cdot x^2 + 200 \cdot e^x \cdot 2x + \frac{200 \cdot 199}{2} \cdot e^x \cdot 2 + 0 = e^x x^2 + 400 e^x x + 39800 e^x .$$